

## 第6章 積分法

(キーワード)

積分、不定積分、部分積分、置換積分、定積分、

### 6.1 積分法

ある関数  $f(x)$  にたいして、

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (6.1)$$

を満たすような関数  $y$  を  $f(x)$  の**原始関数**、あるいは**不定積分**という。これは要するに微分して  $f(x)$  となる**関数**のことである。不定積分を記号

$$y = \int f(x) dx$$

で表す。また、上式は微分係数を含み、関数  $y$  を決めるための微分方程式であるため、(6.1) 式を満たす  $y$  をこの微分方程式の解とも呼ぶ。たとえば、

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

なら、 $y = \int 3x^2 dx = x^3 + C$  である。ここで  $C$  は任意の定数で、不定積分はこの定数だけ不

定である。この  $C$  を**積分定数**と呼ぶ。この定数は  $x$  の特定の値に対する関数の値を指定することで決定される。例えば、上記の例では  $x=0$  で  $y=0$  であるとすれば、 $C=0$  でなければならない。このように積分定数は初期条件により様々な値をとれる。

例として、等加速度運動を考える。鉛直上方に  $y$  軸をとり、質点が垂直下方の重力を受けて落下する場合を考える。加速度は  $-mg$  であるので、時間  $t$  における質点の速度を  $v$  とすると

$$m \frac{dv}{dt} = -mg$$

と書ける。これを満たす時間の関数  $v$  は

$$v = -gt + c_1 \quad \text{ここで、} c_1 \text{ は任意の定数である。}$$

ここで、初期条件として、 $t=0$  のとき速度は上方へ  $v_0$  であるとする。そうすれば、この条件を上式に適用することで  $c_1 = v_0$  として積分定数が決まる。次に、質点の  $y$  座標の時間微分係数は速度を与えるから

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0$$

が成り立つ。この方程式を満たす  $y$  は

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + c_2 \quad c_2 \text{ は任意の定数}$$

である。ここでまた任意定数  $c_2$  が現れたので、初期条件でこれを決めなければならない。初期条件として、 $t=0$  における  $y$  座標が  $y=0$  であるとする。つまり、 $t=0$  のとき質点は原点にあったとする。そうすれば  $c_2=0$  としなければならない。したがって、時刻  $t$  における  $y$  の値は

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

となる。この積分定数の意味を考えよう。

微分方程式  $\frac{dy}{dx} = f(x)$  の解が  $y = F(x)$  であるとする。このとき、 $y = F(x) + C$

も解である。 $C$  は任意の定数なのでこの微分方程式の解としての関数は、グラフで表せば関数  $F(x)$  を  $y$  軸方向へ平行移動した無数の関数群である。その理由は、微分係数はグラフの傾きを与え、この関数群は同一の  $x$  において、全て同じ傾きを与えるからである。

微分方程式を解くこと、あるいは不定積分を求めることは、微分を行う逆の操作であるので、いろいろな関数について微分した結果を逆に利用することになる。

次に、具体的に不定積分を求めるときの良く知られた方式を説明する。

## 6.2 部分積分

関数  $f(x)$  と  $g(x)$  の積  $f(x)g(x)$  の微分係数は

$$\frac{d}{dx} f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

であるので、不定積分

$$f(x)g(x) = \int \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\} dx + C$$

が得られる。これを書き直して

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx - C \quad (6.2)$$

と書ける。これを**部分積分**の方法と言う。最後の積分定数  $C$  の符号は  $-$  でも  $+$  でもよい。

例として、 $\int \log x dx$  を求めてみよう。ここで、 $x$  の微分係数は  $(x)' = 1$  であることに着目すると

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= \int (x)' \log x dx = x \log x - \int x (\log x)' dx + C \\ &= x \log x - \int x \frac{1}{x} dx + C = x \log x - \int dx + C = x \log x - x + C \end{aligned}$$

として求まる。

次の例として  $\int e^{-x} \sin x dx$  を考える。

$$\int e^{-x} \sin x dx = \int -(e^{-x})' \sin x dx = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx$$

また、 $\int e^{-x} \cos x dx = \int -(e^{-x})' \cos x dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x dx$  であるので、

$$\int e^{-x} \sin x dx = I \text{ とおくと上の 2 式から } I = -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - I \text{ と書ける。}$$

これから

$$I = -\frac{(\sin x + \cos x)e^{-x}}{2} + C$$

として不定積分が求まる。ただし、積分定数は最後にまとめて付けた。

### 6.3 置換積分

次に関数  $f(x)$  が  $x$  と  $t$  の関数関係  $x = g(t)$  を通じて  $f(g(t))$  のように  $t$  の合成関数として表せる場合の積分を考える。 $F(x) = \int f(x) dx$  は、 $\frac{dF}{dx} = f(x)$  に対する不定積分である。

$$\frac{dF(g(t))}{dt} = \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dt} = f(x) \frac{dx}{dt} \quad \text{であるから、この両辺を } t \text{ で積分して}$$

$$F(g(t)) = \int f(x) \frac{dx}{dt} dt$$

と書ける。したがって、不定積分  $F(x) = \int f(x) dx$  は  $\int f(g(t)) \frac{dx}{dt} dt$  により  $t$  の関数として与えられる。

最後に  $t$  から  $x$  へ変数変換して不定積分の結果を  $x$  により表す。これは、

形式的には  $dx = \frac{dg}{dt} dt$  と置いて  $\int f(x) dx$  の積分変数を変換して得られる。この

結果は変数変換によって積分計算がやりやすい形になる場合に適用される。

$$\int f(x) dx = \int f(t) \frac{dg}{dt} dt \quad (6.3)$$

例 1 :

$$\int (ax+b)^n dx = \int t^n \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a} \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

ここで、 $ax+b=t$  と置き、 $dx = \frac{dt}{a}$  を用いた。

例 2 :

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{dx}{a^2 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

例 3 :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad \text{の計算を考える。}$$

$$t = x + \sqrt{a^2 + x^2} \text{ と置くと、 } x = \frac{1}{2} \left( t - \frac{a^2}{t} \right) \text{ から、 } dx = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{a^2}{t^2} \right) dt \text{ がえられるの}$$

で、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{1}{t} dt = \log t + C = \log \left( x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C$$

この結果は直線状に分布する電荷が作り出す静電ポテンシャルを求めるところで使用される。

## 6.4 部分分数への分解

分数関数を部分分数に分解すると積分できる場合がある。

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a} \left\{ \int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} \right\} \\ &= \frac{1}{2a} \{ \log(x-a) - \log(x+a) \} + C = \frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a} + C \quad (6.4) \end{aligned}$$

このように分数関数の分母が因数分解できるとき、部分分数に分解できるので不定積分を求めることが可能となる。

## 6.5 定積分

図 6.1 に示すように、関数  $y = f(x)$  が描く曲線と  $x$  軸との間の面積を求める問題を考える。 $x$  の変域を  $[a, b]$  とする。最初に、 $a$  から  $x$  までの面積を考える。この面積は  $x$  の値の関数と考え  $S(x)$  と書く。 $x$  の値が  $x$  から  $x + \Delta x$  まで変化するとき、面積は  $S(x)$  から  $S(x + \Delta x)$  まで変化する。このとき、面積の増分は

$$\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x) \quad (6.5)$$

と書ける。ところで、この面積の増分は近似的に「高さ  $\times$  幅」であり、 $f(x)\Delta x$  と書けるので

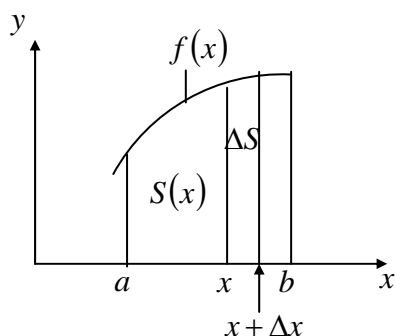


図6.1 面積と原始関数

$$\Delta S = f(x)\Delta x \quad (6.6)$$

である。これより、 $\frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$  であるので、

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ の極限で } \frac{dS}{dx} = f(x) \quad (6.7)$$

であることがわかる。したがって、面積  $S(x)$  は関数  $f(x)$  の不定積分、あるいは原始関数の一つである。不定積分は積分定数の分だけ、無数にあることを確認されたい。  
この結果より、

$$S(x) = \int f(x)dx + C = F(x) + C$$

である。ところで、 $x = a$  での面積は明らかに 0 であるので  $S(a) = F(a) + C = 0$  であるから、  

$$C = -F(a)$$

である、したがって、 $x = b$  での面積  $S(b)$  は

$$S(b) = F(b) - F(a)$$

で与えられる。このように、曲線と  $x$  軸で囲まれた有限の区間での面積は、曲線を与える関数  $f(x)$  の不定積分の  $x = a$  と  $x = b$  での値の差で与えられる。これを記号として、

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (6.8)$$

で表す。例えば、 $f(x) = x^2$  と  $x$  軸との間の面積を区間  $[0, 1]$  で求めると

$$S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{3}(0)^3 = \frac{1}{3} \quad \text{である。}$$

関数  $f(x)$  と  $x$  軸および  $x=a$  と  $x=b$  とで囲まれる領域の面積  $S$  は  $f(x)$  の不定積分  $F(x)=\int f(x)dx$  ; ここに  $\frac{dF}{dx}=f(x)$ 、を用いて  $S=F(b)-F(a)$  で与えられることを見た。面積を求める手順を再確認する。まず、 $x$  軸上の区間  $[a,b]$  を細分割し、 $i$  番目の分割の幅を  $\Delta x_i$  とする。 $\sum_{i=1}^N f(x_i)\Delta x_i$  は積分領域を細い短冊に分割して総和したものであり、近似的に面積を与える。分割点を無限に大きくし、各分割幅を十分細かくすると  $\sum_{i=1}^N f(x_i)\Delta x_i$  は面積  $S$  になっていく。面積という言葉を使わないで、このことを次のように言うことができる。

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

つまり、独立変数の微少幅と関数値との積の総和を区間  $[a,b]$  で求めたものは、この独立変数についての区間  $[a,b]$  に於ける定積分を与える。分割して総和すると覚えること。

## 6.6 定積分における部分積分

$$\frac{d}{dx} f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

が成り立つので両辺を積分して、

$$\int_a^b \left\{ \frac{d}{dx} f(x)g(x) \right\} dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

ところで、定積分の定義から、

$$\int_a^b \left\{ \frac{d}{dx} f(x)g(x) \right\} dx = f(x)g(x) \Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(b)$$

であるから、

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx \quad (6.9)$$

と表せる。つまり、不定積分を求める際に部分積分の方法が有用であったように、定積分についても同様の方式が使える。具体例として、 $\int_1^2 \log x dx$  を求めてみよう。ここで、 $x$  の

微分係数は  $(x)' = 1$  であることに着目すると

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \log x dx &= x \log x \Big|_1^2 - \int_1^2 x (\log x)' dx \\
&= x \log x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \frac{1}{x} dx = x \log x \Big|_1^2 - \int_1^2 dx = x \log x \Big|_1^2 - x \Big|_1^2 = 2 \log 2 - 1
\end{aligned}$$

## 6.7 定積分における置換積分

次に関数  $f(x)$  が  $x$  と  $t$  の関数関係  $x = g(t)$  を通じて  $f(g(t))$  のように  $t$  の合成関数として表せる場合の積分を考える。 $x$  の積分領域  $[a, b]$  は  $t$  の値域  $[\alpha, \beta]$  と 1 対 1 に対応していて、

$a = g(\alpha)$  および  $b = g(\beta)$  である。 $F(x) = \int f(x) dx$  は、 $\frac{dF}{dx} = f(x)$  に対する不定

積分である。ここで、不定積分は変数変換により

$$F(g(t)) = \int f(x) \frac{dx}{dt} dt$$

と表されるので、定積分に利用すると、

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \frac{dx}{dt} dt = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

この結果は変数変換によって積分計算がやりやすい形になる場合に適用される。

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \frac{dg}{dt} dt \quad (6.10)$$

が置換積分を用いた定積分である。ところで、定積分の意味は分割幅と関数値の積の総和であるとの定義を利用すると、上述の結果は

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x_i = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N f(g(t_i)) \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \Delta t_i = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \frac{dg}{dt} dt$$

として確認できる。

置換積分で定積分を計算する際に注意すべきことがある。それは、 $x$  と  $t$  の対応関係が 1 対 1 であることが必要である。たとえば、次の例を考えてみよう。

$$\int_{-1}^1 x^2 dx$$

ここで、 $t = x^2$  として変数を置換すると、 $dt = 2x dx$  あるいは  $dx = \frac{dt}{2x}$  であるが、 $x$  が

$[-1,0]$  の区間では  $x = -\sqrt{t}$  でこれに対応する  $t$  の区間が  $[1,0]$ 、および  $x$  が区間  $[0,1]$  では  $x = \sqrt{t}$  でこれに対応する  $t$  の区間が  $[0,1]$  として積分を 2 つの区間に分けて計算しなければならない。両方の区間で例えば  $x = \sqrt{t}$  を用い、単純に積分区間を  $t = (-1)^2 = 1$  から  $t = 1^2 = 1$  までとして計算すれば積分の結果はゼロになる。今の場合、あえて置換積分を行うのであれば、

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \int_1^0 t \left( -\frac{1}{2\sqrt{t}} \right) dt + \int_0^1 t \left( \frac{1}{2\sqrt{t}} \right) dt = -\frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^0 + \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

のような計算を行う。